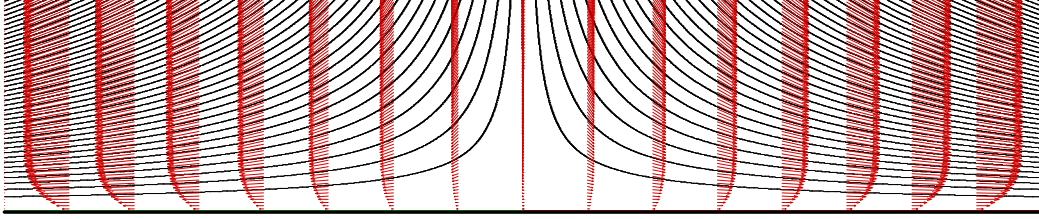


澱み点近傍における強制対流熱伝達

本稿では、下図に示すような二次元澱み点近傍の強制対流熱伝達を考える．物体表面が等温で加熱される場合を対象にする．



壁面から十分に離れた領域では、ポテンシャル流れと見なされ、加速率 a を用いて次式で与えられる．

$$u = ax, \quad v = -a(y - \delta_1) \quad (a > 0) \quad (1)$$

ここで、 δ_1 は排除厚さであり、 $\delta_1 = 0.648\sqrt{\nu/a}$ と与えられる．澱み点を原点とする二次元デカルト座標系における連続の式および Navier-Stokes の運動方程式は、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

と与えられる．ここでは密度および動粘性係数は温度変化に関わらず定数として扱う．支配方程式を無次元化するにあたり、以下のように無次元変数を定義する．

$$\eta = y\sqrt{\frac{a}{\nu}}, \quad U(\eta) = \frac{u(x,y)}{ax}, \quad V(\eta) = \frac{v(y)}{\sqrt{a\nu}}, \quad P(\eta) = \frac{p(x,y) + \frac{1}{2}\rho a^2 x^2}{\rho a \nu} \quad (5)$$

その結果、連続の式および運動方程式はそれぞれ以下ようになる．

$$U + \frac{dV}{d\eta} = 0 \quad (6)$$

$$U^2 + V \frac{dU}{d\eta} = 1 + \frac{d^2U}{d\eta^2} \quad (7)$$

$$V \frac{dV}{d\eta} = -\frac{dP}{d\eta} + \frac{d^2V}{d\eta^2} \quad (8)$$

式(8)は、 η で積分することにより、圧力 P を直接得ることができる．

$$P = -\frac{1}{2}V^2 + \frac{dV}{d\eta} + \text{const.} \quad (9)$$

なお、速度境界条件は次式で与えられる。

$$\begin{cases} \eta = 0: & U = V = 0 \\ \eta \rightarrow \infty: & U = 1 \end{cases} \quad (10)$$

伝熱計算

エネルギー方程式は次式をベースに考える。ここで、温度伝導率 α は定数として扱う。

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (11)$$

式(11)を無次元化するにあたり、以下のように無次元変数を置く。

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}$$

ここで、 T_w は壁面温度を、 T_∞ は境界層外の流体温度を表し、どちらも定数である。式(11)の各項を求めていくと、

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = T_a \frac{d\theta}{d\eta} \sqrt{\frac{a}{\nu}}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = T_a \frac{a}{\nu} \frac{d^2\theta}{d\eta^2}$$

これらを式(11)に代入し整理すると

$$V \frac{d\theta}{d\eta} = \frac{1}{Pr} \frac{d^2\theta}{d\eta^2}, \quad \left(Pr \equiv \frac{\nu}{\alpha} \right) \quad (12)$$

ここで、 Pr はプラントル数である。また、境界条件は、

$$\begin{cases} \eta = 0: & \theta = 1 \\ \eta \rightarrow \infty: & \theta = 0 \end{cases} \quad (13)$$

と与えられる。次に、壁面上での熱流束は、

$$q_w = h(T_w - T_\infty) = -k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = -k(T_w - T_\infty) \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0} = -k(T_w - T_\infty) \sqrt{\frac{a}{\nu}} \left(\frac{d\theta}{d\eta} \right)_{\eta=0} \quad (14)$$

したがって、ヌッセルト数は次式で与えられる。

$$Nu_x = \frac{hx}{k} = \frac{q_w x}{k(T_w - T_\infty)} = -x \sqrt{\frac{a}{\nu}} \left(\frac{d\theta}{d\eta} \right)_{\eta=0} \quad (15)$$

ここで、澱み点流れでのレイノルズ数の定義を次のように与える。

$$Re_x \equiv \frac{ax^2}{\nu} \quad (16)$$

結局、ヌッセルト数は

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = \frac{hx/\lambda}{\sqrt{ax^2/\nu}} = \frac{h}{\lambda} \sqrt{\frac{\nu}{a}} = - \left(\frac{d\theta}{d\eta} \right)_{\eta=0} \quad (17)$$

となる。壁面での無次元温度勾配値は、式(12)の数値計算により得られ、 Pr 数の値に依存することがわかる。

高プラントル数の極限

プラントル数が非常に大きい極限を考える。この場合、温度境界層は速度境界層に比べてずっと薄いので、温度境界層は $U = 1.2326\eta$ で線形的に速度が変化する速度境界層内にあるとみなされる（この 1.2326 という数値は、壁面速度勾配値であり数値的に得られている）。このとき、式(6)の連続の式から $V = -1.2326\eta^2/2$ となる。これを式(12)に代入すると、

$$\frac{1.2326}{2}\eta^2 \frac{d\theta}{d\eta} + \frac{1}{Pr} \frac{d^2\theta}{d\eta^2} = 0 \quad (18)$$

ここで、 $Pr^{1/3}\eta = \xi$ なる変換を用いると、各項は

$$\frac{d\theta}{d\eta} = Pr^{1/3} \frac{d\theta}{d\xi}, \quad \frac{d^2\theta}{d\eta^2} = Pr^{2/3} \frac{d^2\theta}{d\xi^2}$$

であるから、エネルギー式に代入して整理すると次式を得る。

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{1.2326}{2} \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} = 0 \quad (19)$$

境界条件についても、 ξ 表示で表すと

$$\begin{cases} \xi = 0: & \theta = 1 \\ \xi \rightarrow \infty: & \theta = 0 \end{cases} \quad (20)$$

このとき、式(17)は

$$\frac{Nu}{\sqrt{Re}} = \frac{h}{\lambda} \sqrt{\frac{v}{a}} = -Pr^{1/3} \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi=0} \quad (21)$$

簡単な数値計算の結果、式(21)の温度勾配は得られ、ヌッセルト数は

$$\frac{Nu}{\sqrt{Re}} = 0.66077 Pr^{1/3} \cong 0.661 Pr^{1/3} \quad (22)$$

となる。この結果は、文献^[1]に記載の式（p.218 の Table 9.1）に一致する。

低プラントル数の極限

プラントル数が非常に小さい極限を考える。温度境界層は速度境界層に比べてずっと厚いので、速度境界層の厚みは無視され、温度境界層内の速度分布は $U = 1$ 、つまり $V = -\eta$ とみなされる。これを式(12)に代入すると、

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + Pr\eta \frac{d\theta}{d\eta} = 0 \quad (23)$$

ここで、 $\sqrt{Pr/2} \cdot \eta = \zeta$ なる変換を用いると、各項は

$$\frac{d\theta}{d\eta} = \sqrt{\frac{Pr}{2}} \frac{d\theta}{d\zeta}, \quad \frac{d^2\theta}{d\eta^2} = \frac{Pr}{2} \frac{d^2\theta}{d\zeta^2}$$

エネルギー式に代入して整理すると、

$$\frac{d^2\theta}{d\zeta^2} + 2\zeta \frac{d\theta}{d\zeta} = 0 \quad (24)$$

境界条件についても、 ζ 表示で表すと

$$\begin{cases} \zeta = 0: & \theta = 1 \\ \zeta \rightarrow \infty: & \theta = 0 \end{cases} \quad (25)$$

このとき、式(17)は

$$\frac{Nu}{\sqrt{Re}} = \frac{h}{\lambda} \sqrt{\frac{v}{a}} = -\sqrt{\frac{Pr}{2}} \left(\frac{d\theta}{d\zeta} \right)_{\zeta=0} \quad (26)$$

となる。式(24)、(25)を満たす解は、誤差関数を用いて

$$\theta = 1 - \operatorname{erf}(\zeta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\zeta \exp(-\xi^2) d\xi \quad (27)$$

となることが知られる。これより壁面での温度勾配は、

$$\left(\frac{d\theta}{d\zeta} \right)_{\zeta=0} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \quad (28)$$

であるから、これを式(26)に代入して、ヌッセルト数は

$$\frac{Nu}{\sqrt{Re}} = \sqrt{\frac{2Pr}{\pi}} = 0.79788Pr^{1/2} \cong 0.798Pr^{1/2} \quad (29)$$

と得られる。この結果は、文献^[1]に記載の式 (p.218 の Table 9.1) に一致する。

表1に幾つかのプラントル数に対するヌッセルト数（壁面温度勾配値）の結果をまとめる。式(12)に基づく数値計算結果を2列目に、高 Pr 数の極限を3列目に、低 Pr 数の極限を4列目に、そして参考までに文献^[2]で紹介されている式を5列目に示す。

表1 本数値計算による得られた温度勾配値と極限値の比較

Prandtl number	壁面温度勾配の数値計算値	高 Pr 数の極限 $0.661Pr^{1/3}$	低 Pr 数の極限 $0.798Pr^{1/2}$	参考 ^[2] $0.570Pr^{0.4}$
0.001	0.02483	—	0.02523	0.03596
0.01	0.07597	—	0.07980	0.09034
0.1	0.2195	—	0.2523	0.2269
1	0.5705	—	—	0.5700
10	1.339	1.424	—	1.432
100	2.986	3.068	—	3.596
1000	6.527	6.610	-	9.034

高プラントル数の数値計算では、温度境界層が速度境界層よりも薄いので、計算領域幅を広げる必要はないが、温度勾配が大きな値を取るので、格子数不足には注意が必要である。一方で、低プラントル数では、温度境界層が速度境界層よりも厚いので、計算領域幅を十分に大きく取って計算する必要がある。いずれの高・低プラントル数域の計算においても、その数値精度の確保は難しくなるものの、それとは別途、高・低プラントル数の極限として得られたそれぞれの相関式との一致は良好である。参考として示す相関式は、プラントル数が 1 近辺では比較的良好だが、高・低プラントル数の極限域においては、精度が良いとは言い難い。なお、文献^[2]中に示される(47)式は、 $Nu/\sqrt{Re} = 0.491Pr^{1/3}$ とあるが、これは本原稿の式(22)と比べて係数の値がかけ離れているので、どうやら誤植と思われる。

参考文献

- [1] H. Schlichting and K. Gersten, “Boundary-Layer Theory”, 8th revised and enlarged edition, Springer, (2000).
- [2] 吉田 英生, 「ある角度からとことん似ていて, ある角度からは似て非なる球と円柱」, 伝熱学・熱流体力学における『のどの小骨』を流し込む, 伝熱, 2004 年 1 月.
- [3] 「二次元澱み点流れ」, 研究室コラム: 数値熱流体 (熱流体色々).